Incomparabilidade: R'/R extensão integral de anéis, $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ ideais primos.

Então, se $\mathfrak{p}'$ e $\mathfrak{q}'$ estão sobre o mesmo primo $\mathfrak{p} \subset R$, temos

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{q}'$$

Exemplo:

$$\begin{array}{ccc} R & & R' \\ \mathbb{C}[y] & \hookrightarrow & \mathbb{C}[x] \\ y & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$\Rightarrow R'/R$ é extensão integral. Fazendo $\mathfrak{p}' := \langle x-1 \rangle$ e $\mathfrak{q}' := \langle x+1 \rangle$, temos $\mathfrak{p}', \mathfrak{q}' \subset R'$ são primos e temos

$$\mathfrak{p}' \cap R = \langle y-1 \rangle = \mathfrak{q}' \cap R.$$

Lema: Seja R um anel e seja $\mathfrak{p} \subset R$ um primo minimal. Então $\mathfrak{p} \subset \{x \in R \mid x$ é divisor de zero$\}$.

Dem: Seja $\mathfrak{p} \subset R$ primo minimal.

Então $\operatorname{Spec}(R_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\}$.

Logo $\operatorname{nil}(R_{\mathfrak{p}}) \supset \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, logo

$\forall x \in \mathfrak{p} \quad \exists_{N \in \mathbb{N}}$ tq. $\left(\frac{x}{1}\right)^N = 0$

$\Leftrightarrow \exists s \notin \mathfrak{p}$: $sx^N = 0$

$\therefore x$ é divisor de zero.

$\boxtimes$

Teorema (Going-down para módulos)

Sejam $R \to R'$ hom. de anéis, $M' \in R'$-mod f.g., $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$ primos de R, $\mathfrak{q}' \in \operatorname{Supp}(M')$ sobre $\mathfrak{q}$. Se M' é plano$/R$, então $\exists$ $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Supp}(M')$ sobre $\mathfrak{p}$ t.q.

$$\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'.$$

Dem: 1. $M' \otimes_R R/\mathfrak{p}$ é plano em $R/\mathfrak{p}$-mod:

seja $N \in R/\mathfrak{p}$-mod, temos

$$M' \otimes_R N = (M' \otimes_R R/\mathfrak{p}) \otimes_{R/\mathfrak{p}} N$$

2. $M' \otimes_R R/\mathfrak{p} = M'/\mathfrak{p}M'$

$\therefore$ podemos substituir R por $R/\mathfrak{p}$ substituindo M' por $M'/\mathfrak{p}M'$ e $\mathfrak{p}$ por $\langle 0 \rangle$.

$\therefore$ podemos assumir que R é domínio e $\mathfrak{p} = \langle 0 \rangle$.

Seja então $\mathfrak{p}' \subset \mathfrak{q}'$ primo minimal em $\operatorname{Supp}(M') = V(\operatorname{Ann}(M'))$

A provar: $\mathfrak{p}'$ está sobre $\langle 0 \rangle$.

Substituindo $R' \leftrightarrow R'/\operatorname{Ann}(M')$ podemos supôr que R' age fielmente em M': sejam $m'_1, \ldots, m'_n$ geradores de M'.

Seja $\alpha : R' \to M'^n$

$\alpha(x') := (x'm'_1, \ldots, x'm'_n)$

Temos α' 1-1 e portanto R' é um submódulo de M''

Dado $x \in R - \langle 0 \rangle$, $\mu_x : R \to R$ é (1-1) (pq R é domínio)

$\Rightarrow \mu_x : M' \to M'$ é (1-1)

$\Rightarrow \mu_x : M'' \to M''$ é (1-1)

$\Rightarrow \mu_x : R' \to R'$ é 1-1

porque $R' \hookrightarrow M''$ inclusão de R-submódulo.

$\therefore P' \cap R = \langle 0 \rangle$

$\square$

Teorema de Normalização de Noether como teorema de estrutura.

k = corpo

Seja R a k-alg. f.g. (como álgebra)

Notação: $R = k[x_1, \dots, x_n]$ (não confundir com a álgebra de polinômios $k[X_1, \dots, X_n]$.)

NB: $R \simeq k[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$, para algum ideal $\mathfrak{a}$. Isso é dado por

$$X_i \overset{\varphi}{\longmapsto} x_i$$

NB: Se $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_r \subset R$ é uma cadeia de ideais então

então
$$\mathfrak{a}_1' \subset \mathfrak{a}_2' \subset \dots \subset \mathfrak{a}_r' \subset k[X_1, \dots, X_n]$$

com $\mathfrak{a}_i' := \varphi^{-1}\mathfrak{a}_i$

é uma cadeia de ideais em $k[X_1, \ldots, X_n]$

Fazendo $\mathfrak{a}_0' := \ker \varphi$, vem

$$\mathfrak{a}_0' \subset \mathfrak{a}_1' \subset \cdots \subset \mathfrak{a}_r'$$

é cadeia de ideais t.q.

$$\varphi(\mathfrak{a}_0') = \langle 0 \rangle$$

$$\varphi(\mathfrak{a}_i') = \mathfrak{a}_i, \ i \geq 1.$$

Lema (Normalização de Noether): Seja R um κ-álgebra f.g., $R = \kappa[x_1, \dots, x_n]$ e seja

$$\mathfrak{a}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{a}_r \subsetneq R$$

ideais, então $\exists$ subálgebra $P = \kappa[t_1, \dots, t_\nu]$ t.q. $t_1, \dots, t_\nu$ são algebricamente independentes $/\kappa$ (i.e. $P = \kappa[T_1, \dots, T_\nu]$), $\nu \leq n$ e

1. R é um módulo finito $/P$
2. $\exists_{h_i} : \mathfrak{a}_i \cap P = \langle t_1, \dots, t_{h_i} \rangle \; \forall i$

Dem: Passo 0: reduzir ao caso em R é uma álgebra de polinômios, i.e., podemos assumir que os x_i's são algebrica/ independentes.

Suponmos $R = k[x_1, \dots, x_n]$.

Objetivo: demonstrar que o resultado é válido com $\nu = n$.

Caso 1: $r = 1$ e $\mathfrak{a}_1 = t_1 R$ $(\mathfrak{a}_1 \neq 0)$

Temos $t_1 \notin k$. Suponhamos $t_2, \dots, t_n \in R$ tq.

(1.1) x_1 é integral $|$ $P := k[t_1, \dots, t_n]$

(1.2) $R = P[x_1]$

Das propriedades das bases de transcendência $t_1, t_2, \dots, t_n$ são alg. indep.

Vejamos que, nesse caso, ter-se-á

$$\mathfrak{P}_1 \cap P = \langle t_1 \rangle$$

Temos $\langle t_1 \rangle \subset \mathfrak{P}_1 \cap P$

Dado $x \in \mathfrak{P}_1 \cap P$, temos $x = t_1 x'$
em $k[X_1, \dots, X_n]$

e $x \in P$

$$\Rightarrow x' = \frac{\overset{P}{\overset{\Downarrow}{x}}}{t_1 \in P} \text{ em } k(X_1, \dots, X_n)$$

$$\Rightarrow x' \in \mathrm{Frac}(P) \cap R$$

$\Rightarrow x' \in P$ pq R ē int $P/$
P e P ē normal

$\therefore x \in \langle t_1 \rangle \subset P$

$\therefore \mathfrak{P}_1 \cap P = \langle t_1 \rangle$.

Falta provar $\exists\, t_2, \dots, t_n$ tq. (1.1) e (1.2) se verificam.

Seja $t_i := X_i - X_1^{l_i}$, $i = 2, \dots, n$, para l_i.

Claramente

$$P[X_1] = R$$

"Basta" os l_i's t.q. X_1 seja integral / P.

Temos

$$t_1 = \sum_{(j)} \overset{\overset{K}{\swarrow}}{a_{(j)}} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n} \qquad (*)$$

com $(j) = (j_1, \dots, j_n)$ e $a_{(j)} \in K$.

$(*)$ Dá uma eq. para X_1 nos t_i's:

$$\sum_{(j)} a_{(j)} x_1^{j_1} (t_2 + x_1^{l_2})^{j_2} \cdots (t_n + x_1^{l_n}) = t_1$$

Denotemos $e(j) := j_1 + l_2 j_2 + \cdots + l_n j_n$

Seja $\ell > \max(j_i)$ e seja $\ell_i := \ell^i$.

$\Rightarrow e(j) = j_1 + j_2\ell^2 + \cdots + j_n \ell^n$

$\Rightarrow e(j)$'s são todos distintos

Denotemos por $e(j') > 0$ o seu máximo.

Obtemos uma eq. de forma

$$a(j')\, x_1^{e(j')} + \sum_{e < e(j')} p_e x_1^e = 0$$

com $p_e \in P = k[t_1, \ldots, t_n]$

$\therefore$ com esta escolha dos ℓ_i,

x_1 é integral $/P$

Caso 2: $r=1$ e $\mathfrak{I}_1 \neq \langle 0 \rangle$ arbitrário (não necessariamente principal)

Por indução em n: se $n=1$, estamos no caso 1 ✓. Supomos verdade $n-1$.

Seja $t_1 \in \mathfrak{I}_1$. Pelo caso 1, com $\mathfrak{I}_1 = t_1 R$

$\exists\, u_2, \ldots, u_n$ t.q. $t_1, u_2, \ldots, u_n$ são alg. indep. e

(1) R é finito / $k[t_1, u_2, \ldots, u_n]$

(2) $\langle t_1 \rangle = t_1 R \cap k[t_1, u_2, \ldots, u_n]$

Por hip. de indução $\exists\, t_2, t_3, \ldots, t_n$ $\in k[u_2, \ldots, u_n]$ t.q.

(1) $k[u_2, \ldots, u_n]$ é módulo finito / $k[t_2, \ldots, t_n]$

(2) $\mathfrak{m}_1 \cap k[u_2, \ldots, u_n] \cap k[t_2, \ldots, t_n] =$

$= \langle t_2, \ldots, t_h \rangle \subset k[t_2, \ldots, t_n]$

para algum h.

Tomemos para $P = k[t_1, t_2, \ldots, t_n]$.

Temos

R é finito / $k[t_1, u_2, \ldots, u_n]$ que é

finito / $k[t_1, \ldots, t_n]$

$\Rightarrow$ R é módulo finito / $k[t_1, \ldots, t_n]$

$\Longrightarrow$ $t_1, \ldots, t_n$ é alg. ind. / k.

Mais, $\mathfrak{a}_1 \cap k[t_2,\dots,t_n] = \langle t_2,\dots,t_n\rangle$

$$\therefore \quad \mathfrak{a}_1 \cap k[t_1,\dots,t_n] \supset \langle t_1,t_2,\dots,t_n\rangle$$

Dado $x \in \mathfrak{a}_1 \cap k[t_1,\dots,t_n]$

temos $\quad x = t_1x' + x''$

com $x' \in k[t_1,\dots,t_n]$ e $x'' \in k[t_2,\dots,t_n]$

Como $t_1 \in \mathfrak{a}_1$, $t_1x' \in \mathfrak{a}_1$ e portanto

$$x'' \in \mathfrak{a}_1 \cap k[t_2,\dots,t_n] = \langle t_2,\dots,t_n\rangle$$

$\therefore\ x \in \langle t_1,\dots,t_n\rangle$

$\Longrightarrow$

$$x^1 = \sum_i t_1^i \, P_i(u_2, \ldots, u_n)$$

Prop: Seja R um domínio e seja $R'|R$ uma extensão t.q. R' é uma R-álgebra f.g. Então $\exists f \in R - \langle 0 \rangle$ $\exists x_1, \ldots, x_n \in R'$ t.q.

(1) $x_1, \ldots, x_n$ são alg. indep. $/R$

(2) R'_f é um módulo finito sobre $R[x_1, \ldots, x_n]_f$

Em particular, R'_f é extensão integral de $R[x_1, \ldots, x_n]_f$.